SỞ GIÁO DỤC – ĐÀO TẠO
AN GIANG

ĐỀ CHÍNH THỨC

SBD : ………… PHÒNG :……

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH

Năm học 2011 – 2012

Môn : TOÁN

Lớp : 9

Thời gian làm bài : **150 phút**
(Không kể thời gian phát đề)

Bài 1: (3,0điểm)

Rút gọn

$$A=\left(\sqrt{\sqrt{3}+2-\sqrt{31-12\sqrt{3}}}-\sqrt{3}\right):\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right).$$

Bài 2: (3,0điểm)

Chứng minh rằng nếu hai phương trình $x^2+bx+c=0$; $x^2+3bx+3c=0$ có nghiệm thì phương trình $x^2+2bx+2c=0$ có nghiệm.

Bài 3: (4,0điểm)

Cho hệ phương trình

$$\begin{cases}(m-1)x-(m-1)y=m-37\\ x+2y=3m+1\end{cases}$$ với m là tham số

a) Với m nào thì hệ phương trình có một nghiệm duy nhất.
b) Tìm m nguyên để hệ phương trình có nghiệm x và y nguyên và x+y bé nhất.

Bài 4: (4,0điểm)

a) Chứng minh rằng với mọi số thực a,b thì

$$\frac{a^4+b^4}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^4$$

Dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra khi nào?

b) Phân tích đa thức sau đây thành nhân tử

$$P(x)=x^4-8x^2-x+12$$

Bài 5:(6,0điểm)

Gọi A’; B’; C’ lần lượt là trung điểm của các cung $\widehat{BC}$; $\widehat{CA}$; $\widehat{AB}$ không chứa các điểm A; B; C của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. BC cắt A’C’ và A’B’ tại M và N ; CA cắt A’B’ và B’C’ tại P và Q; AB cắt B’C’ và A’C’ tại R và S.

a) Chứng tỏ rằng AA’; BB’; CC’ đồng quy tại I.
b) Chứng minh rằng IQAR là hình thoi.
c) Tìm điều kiện của tam giác ABC để MN=PQ=RS .

-----Hết -----

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
AN GIANG

HƯỚNG DẪN CHẤM HỌC SINH GIỎI LỚP 9
Năm học 2011 – 2012
MÔN TOÁN

A.ĐÁP ÁN

Bài 1	$A=\left(\sqrt{\sqrt{3}+2-\sqrt{31-12\sqrt{3}}}-\sqrt{3}\right):\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)$. • Ta có $\left(3\sqrt{3}-2\right)^2=27-12\sqrt{3}+4=31-12\sqrt{3}$ $\Rightarrow \sqrt{31-12\sqrt{3}}=3\sqrt{3}-2$. $\Rightarrow \sqrt{3}+2-\left(3\sqrt{3}-2\right)=4-2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}-1\right)^2$ $\sqrt{\sqrt{3}+2-\sqrt{31-12\sqrt{3}}}=\sqrt{3}-1$. • Mặt khác $5\sqrt{2}+7=2\sqrt{2}+6+3\sqrt{2}+1=\left(\sqrt{2}+1\right)^3$. $5\sqrt{2}-7=2\sqrt{2}-6+3\sqrt{2}-1=\left(\sqrt{2}-1\right)^3$. Suy ra $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)=2$ • Vậy $A=-\frac{1}{2}$	**3,0điểm**
Bài 2	Chứng minh rằng nếu hai phương trình $x^2+bx+c=0$; $x^2+3bx+3c=0$ vô nghiệm thì phương trình $x^2+2bx+2c=0$ vô nghiệm. **Giải**: • Phương trình $x^2+bx+c=0$ có nghiệm khi $b^2-4c\geq 0$ • Phương trình $x^2+3bx+3c=0$ vô nghiệm khi $9b^2-12c\geq 0$ $\Leftrightarrow 3b^2-4c\geq 0$ • Phương trình $x^2+2bx+2c=0$ có $\Delta=4b^2-8c=(b^2-4c)+(3b^2-4c)$ • Vì $b^2-4c\geq 0$ và $3b^2-4c\geq 0$ nên $\Delta\geq 0$ hay phương trình $x^2+2bx+2c=0$ có nghiệm.	**3,0điểm**
Bài 3a)	$\begin{cases}(m-1)x-(m-1)y=m-37 & (1)\\ x+2y=3m+1 & (2)\end{cases}$ Từ (2) ta được $x=3m+1-2y$ Thay vào (1) $(m-1)(3m+1-2y)-(m-1)y=m-37$ $(m-1)(3m+1)-2(m-1)y-(m-1)y=m-37$ $\Leftrightarrow -3(m-1)y=-3m^2+3m-36$ (3) Hệ phương trình có nghiệm khi phương trình (3) có nghiệm Vậy $m\neq 1$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất và nghiệm là $x=\frac{m^2-25}{m-1}$; $y=\frac{m^2-m+12}{m-1}$	**2,0điểm**

<table>
<tr>
<td>Bài 3b)</td>
<td>

- Viết lại nghiệm của hệ như sau

$$x = \frac{m^2 - 25}{m - 1} = m + 1 - \frac{24}{m - 1}$$

$$y = \frac{m^2 - m + 12}{m - 1} = m + \frac{12}{m - 1}$$

- Do m nguyên để hệ phương trình có nghiệm nguyên khi $m - 1$ là ước của 12 và 24 khi đó m-1 bằng $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12$

<table>
<tr><td>m</td><td>-11</td><td>-5</td><td>-3</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>7</td><td>13</td></tr>
<tr><td>x</td><td>-8</td><td>0</td><td>4</td><td>7</td><td>12</td><td>25</td><td>-21</td><td>-8</td><td>-3</td><td>0</td><td>4</td><td>12</td></tr>
<tr><td>y</td><td>-12</td><td>-7</td><td>-6</td><td>-6</td><td>-7</td><td>-12</td><td>14</td><td>9</td><td>8</td><td>8</td><td>9</td><td>14</td></tr>
<tr><td>x+y</td><td>-20</td><td>-7</td><td>-2</td><td>1</td><td>5</td><td>13</td><td>-7</td><td>1</td><td>5</td><td>8</td><td>13</td><td>26</td></tr>
</table>

Vậy $m = -11$ thì hệ phương trình có nghiệm nguyên là $x = -8$; $y = -12$ và $x + y = -20$ bé nhất.

</td>
<td>2,0điểm</td>
</tr>
<tr>
<td>Bài 4a)</td>
<td>

Chứng minh rằng

$$\frac{a^4 + b^4}{2} \geq \left(\frac{a + b}{2}\right)^4$$

- Ta có nhận xét với mọi số a, b ta luôn có

$(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2) \geq (a^2 + 2ab + b^2) \Leftrightarrow \dfrac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\dfrac{a + b}{2}\right)^2 \quad (1)$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b$

- Áp dụng bất đẳng thức (1) cho hai số thực $a^2; b^2$ ta được

$$\frac{a^4 + b^4}{2} \geq \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2$$

- Theo (1) ta lại có

$$\left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{a + b}{2}\right)^4$$

- Vậy

$$\frac{a^4 + b^4}{2} \geq \left(\frac{a + b}{2}\right)^4$$

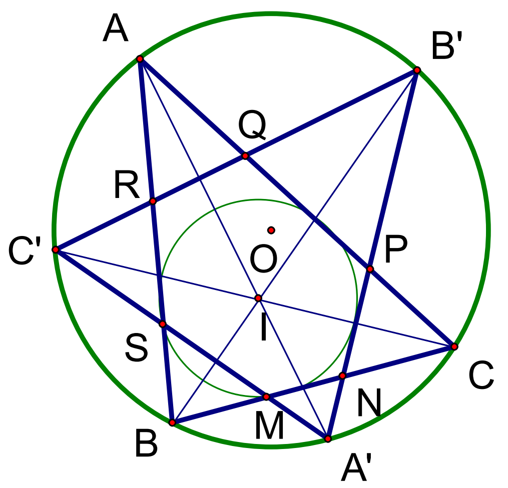
dấu bằng xảy ra khi $a = b$

</td>
<td>2,0điểm</td>
</tr>
<tr>
<td>Bài 4b)</td>
<td>

$P(x) = x^4 - 8x^2 - x + 12 = x^4 - 7x^2 + \dfrac{49}{4} - x^2 - x - \dfrac{1}{4}$

$= \left(x^2 - \dfrac{7}{2}\right)^2 - \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 = (x^2 + x - 3)(x^2 - x - 4)$

</td>
<td>2điểm</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>+ $x^2+x-3=0 \Leftrightarrow x_1=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$; $x_2=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$
Nên $(x^2+x-3)=\left(x-\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$
+ $x^2-x-4=0 \Leftrightarrow x_3=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$; $x_4=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}$
Nên $(x^2-x-4)=\left(x-\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$
Vậy
$P(x)=x^4-8x^2-x+12$
$=\left(x-\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x+\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Bài 5a)</td>
<td>

a) Chứng minh AA'; BB'; CC' đồng quy
Do cung $\widehat{A'B} = \widehat{A'C}$ nên AA' là phân giác của góc $\widehat{BAC}$ tương tự BB' và CC' là phân giác của các góc $\widehat{ABC}$ và $\widehat{BCA}$ vậy AA'; BB'; CC' là ba đường phân giác trong của tam giác ABC vậy chúng đồng quy tại I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.</td>
<td>2,0điểm</td>
</tr>
<tr>
<td>Bài 5 b)</td>
<td>b) Chứng minh IQAR là hình thoi.
Ta có $\widehat{ACC'} = \widehat{BB'C'}$ (góc nội tiếp chắn cung bằng nhau)
Vậy B', C cùng nhìn IQ dưới hai góc bằng nhau nên tứ giác IQB'C nội tiếp
$\Rightarrow \widehat{QIB'} = \widehat{QCB'} = \widehat{ABB'} \Rightarrow IQ||AB$
tương tự
tứ giác IRC'B nội tiếp do $\widehat{ABB'} = \widehat{CC'B}$(góc nội tiếp chắn cung bằng nhau)
$\Rightarrow \widehat{IRB} = \widehat{CC'B} = \widehat{CAB} \Rightarrow IR||AC$
vậy IQAR là hình bình hành
mặt khác cung sd$\widehat{C'BA'}$ + sd$\widehat{AB'}$ = sd$\widehat{A'CB'}$ + sd$\widehat{AC'}$; nên hai dây AA' và B'C'vuông góc hay IQAR là hình thoi.</td>
<td>2,0điểm</td>
</tr>
<tr>
<td>Bài 5c)</td>
<td>c) Tìm điều kiện của tam giác ABC để MN=PQ=RS .

Chứng minh tương tự câu b ta có ISBM và INCP đều là các hình thoi
Mặt khác IMN đồng dạng với tam giác ABC vì có các cạnh tương ứng song</td>
<td>2,0 điểm</td>
</tr>
</table>

	song nên ta có tỉ số: $\frac{IM}{AB} = \frac{IN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{IM + IN + MN}{AB + AC + BC} = \frac{(BM + CN + MN)}{2p} = \frac{BC}{2p}$ $\Longrightarrow MN = \frac{BC^2}{2p}$ tương tự $PQ = \frac{AC^2}{2p}$; $RS = \frac{AB^2}{2p}$ như vậy: Điều kiện cần và đủ để MN=PQ=RS là tam giác ABC đều	

B HƯỚNG DẪN CHẤM

+ Học sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa

+ Điểm số có thể chia nhỏ đến 0,25 cho từng câu. Tổng điểm toàn bài không làm tròn